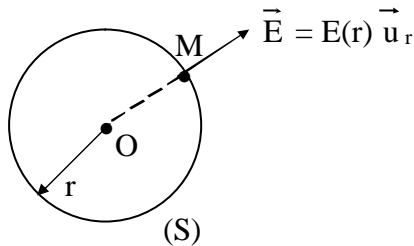


Partie I – Le modèle de Thomson

I.A) Dans le modèle de Thomson, le champ électrostatique du noyau est celui d'une sphère de centre O, rayon a et charge + e. Il se calcule trivialement à l'aide du théorème de Gauss :



Pour $r \leq a$:

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \vec{n}_{\text{ext}} = E(r) 4 \Pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{e}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a} \right)^3$$

Ainsi :

$$\vec{E} = \frac{e}{4 \Pi \epsilon_0} \frac{r}{a^3} \vec{u}_r \quad (\text{pour } r \leq a)$$

L'électron est alors soumis à la force électrique :

$$\vec{F} = -e \vec{E} = \frac{-e^2}{4 \Pi \epsilon_0 a^3} \vec{r}$$

Soit :

$$\vec{F} = -k \vec{r}$$

si

$$k = \frac{e^2}{4 \Pi \epsilon_0 a^3}$$

I.B) Il s'agit donc bien d'une force de rappel de type «élastique », analogue à celle exercée par un ressort fixé en O de raideur k (et de longueur à vide nulle).

I.C) Mouvement de l'électron

I.C.1) \vec{F} est une force centrale de centre O, donc le mouvement de l'électron est plan ($\frac{d\vec{\ell}(O)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, conservation du moment cinétique en O).

I.C.2) La RFD, appliquée à l'électron dans un référentiel galiléen, s'écrit, en projection sur $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{x} = -kx : x = \alpha_1 \cos w_0 t + \alpha_2 \sin w_0 t \\ m \ddot{y} = -ky : y = \beta_1 \cos w_0 t + \beta_2 \sin w_0 t \\ m \ddot{z} = -kz : z = \gamma_1 \cos w_0 t + \gamma_2 \sin w_0 t \end{array} \right. \quad (w_0^2 = \frac{k}{m})$$

Les conditions initiales sont :

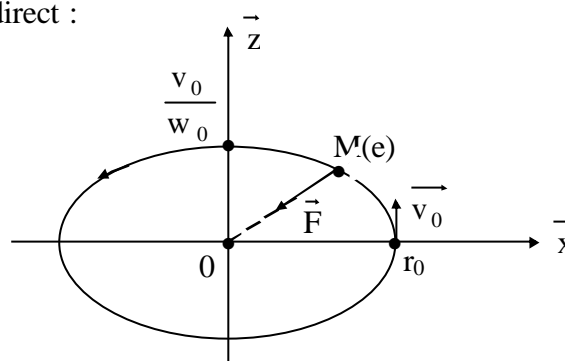


$$\begin{cases} x(0) = r_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = r_0 \cos \omega_0 t}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y(t) = 0}$$

$$\begin{cases} x(0) = r_0 \\ \dot{z}(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t}$$

I.C.3) La trajectoire est donc, dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) , une ellipse de centre 0, demi-axes r_0 et $\frac{v_0}{\omega_0}$, décrite dans le sens direct :



La Terre décrit également une ellipse autour du Soleil, mais le centre du Soleil en est un foyer (1^{ère} loi de Képler).

I.C.4) La période du mouvement est :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

I.C.5) A.N. :

$$\begin{cases} f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 a^3 m}} \approx 2,5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \\ \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 1,2 \times 10^{-7} \text{ m} = 120 \text{ nm} \end{cases}$$

Le spectre correspondant est celui de l'ultraviolet.

I.C.6) Si $\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = \vec{0}$: $\vec{\ell}(O) = \vec{cste} = \vec{0}$, donc le mouvement est rectiligne sinusoïdal (oscillateur harmonique unidimensionnel, système {masse, ressort} en mouvement selon $O\vec{x}$).

I.D) Application

I.D.1) Pour $a \ll \lambda$, l'électron ne « voit pas » les variations spatiales de \vec{E} (dont la période spatiale est λ_0).

Dans ces conditions, la RFD appliquée à l'électron s'écrit :

$$\boxed{m \ddot{z} = -kz - e E_0 \cos \omega t}$$

I.D.2) Dans le visible : $w = \frac{2\Pi C}{\lambda} \approx 5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \ll w_0 \approx 1,5 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ ($\lambda \approx 500 \text{ nm}$)

I.D.3) En RSF, on aura donc :

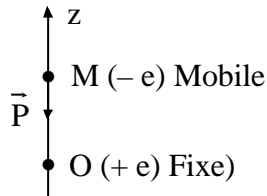
$$-w^2 z = -w_0^2 z - \frac{eE}{m} \cos wt \Rightarrow z(t) = \frac{-eE/m}{w_0^2 - w^2} \cos wt$$

Compte-tenu de $w \ll w_0$:

$$z(t) \approx - \frac{eE}{m w_0^2} \cos wt$$

Rem. : pour w voisin de w_0 , il y a résonance, et il est nécessaire de prendre en compte le freinage par rayonnement d'accélération pour borner $|z|$ à la résonance (on modélise ce freinage, dans le modèle de Lorentz, par une force de frottement fluide $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$).

I.D.4)



$$\vec{P}(t) = -e z(t) \vec{z}$$

I.D.5) La zone de rayonnement correspond à $r \gg \lambda$: dans cette zone, le champ (\vec{E}, \vec{B}) rayonné est en $\frac{1}{r}$, et possède une structure locale d'onde plane.

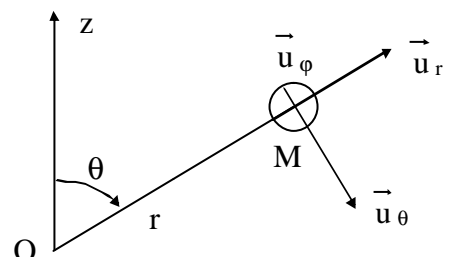
I.D.6) $\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\Pi} \left[\frac{\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{r} \right] \vec{z}$

Donc : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\Pi} \left[\frac{\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{r} \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{z}}_{\vec{O}} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{r} \right) \wedge \vec{z} \right]$

Avec : $\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{r} \overset{\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \overset{\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{u}_r = \left[-\frac{1}{r^2} \overset{\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{rc} \overset{\circ\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{u}_r$

Or : $\frac{\left| \frac{\overset{\circ}{p}}{r^2} \right|}{\left| \frac{\overset{\circ\circ}{p}}{rc} \right|} \sim \frac{w p/r^2}{w^2 p/rc} = \frac{c}{wr} \sim \frac{\lambda}{r} \ll 1$ dans la zone de rayonnement

Alors : $\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\Pi} \left[-\frac{1}{rc} \overset{\circ\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \left(\underbrace{\vec{u}_r \wedge \vec{z}}_{-\sin \theta \vec{u}_\phi} \right)$





Soit :

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi rc} \overset{\circ\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

La structure locale d'onde plane donne ensuite le champ électrique rayonné, toujours pour $r \gg \lambda$:

$$\vec{E} \approx \vec{B} \wedge c \vec{u}_r \approx \frac{\mu_0}{4\pi c} \overset{\circ\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \theta \vec{u}_\theta$$

I.D.7) On calcule alors : $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0} c \vec{u}_r$

Soit : $\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \overset{\circ\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{u}_r$

($\vec{\Pi}$ en $\sin^2 \theta$: anisotropie du rayonnement, nul pour $\theta = 0$ ou π , maximal pour $\theta = \pi/2$).

La puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r se calcule ensuite par :

$$\begin{aligned} P &= \oint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot dS \vec{u}_r \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \times r d\theta r \sin \theta d\varphi \langle \overset{\circ\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \rangle \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi c} \left(\underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta}_{4/3} \right) \langle \overset{\circ\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \rangle \\ &= \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \overset{\circ\circ}{P} \left(t - \frac{r}{c}\right) \rangle \end{aligned}$$

Enfin : $p(t) = -e z$, $\overset{\circ\circ}{z} = -w^2 z \Rightarrow \overset{\circ\circ}{p} = e^2 w^4 \langle z^2 \rangle$

Et finalement :

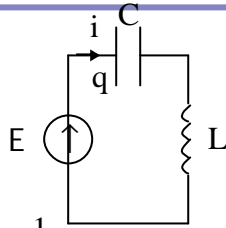
$$P = \left(\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \right) w^4 \langle z^2 \rangle \quad (\alpha = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c})$$

I.D.8) Les atomes atmosphériques soumis aux rayons solaires deviennent des dipôles oscillants.

Dans le visible : $\frac{P_{\text{Rouge}}}{P_{\text{Bleu}}} = \left(\frac{w_R}{w_B} \right)^4 = \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_R} \right)^4 \approx \frac{1}{16} \quad (\lambda_R \approx 2 \lambda_B)$

Le rayonnement est donc environ 16 fois plus important dans le bleu que dans le rouge (d'où la couleur bleue du ciel).

I.D.9)



$$E = \frac{q}{C} + L \dot{i} = \frac{q}{C} + L \ddot{q}$$

Ainsi :

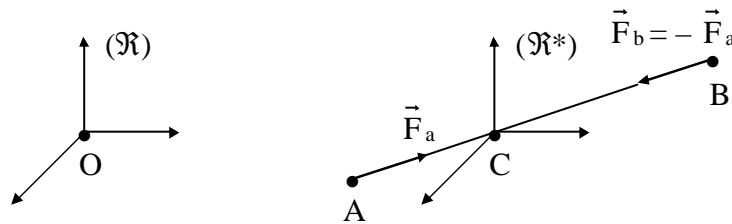
$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = U \sin \omega t$$

Donc L ? m , $\frac{1}{C}$? k , U ? $e E_0$

I.D.10) Le modèle de J.J. Thomson, ou modèle de l'électron élastiquement lié, permet d'expliquer certains phénomènes physiques comme le rayonnement de l'atome d'hydrogène ; on peut en outre procéder à une analogie électrique simple, ce qui peut permettre de simuler le comportement de cet atome soumis à un champ sinusoïdal.

Partie II – Du modèle de J.J. Thomson à celui de Rutherford

II.A) Généralités sur le problème à deux corps



II.A.1) Par définition : $\vec{OC} = \frac{m_a \vec{OA} + m_b \vec{OB}}{m_a + m_b} \Rightarrow \vec{v}_c = \frac{m_a \dot{\vec{v}}_A + m_b \dot{\vec{v}}_B}{m_a + m_b}$

Le système étant isolé : $\vec{v}_c = \text{cste}$ (mouvement de TRU).

II.A.2) Le référentiel barycentrique (\mathcal{R}^*) a pour centre C et est en translation par rapport à (\mathcal{R}) (axes parallèles aux axes fixes).

Pour un système isolé, (\mathcal{R}^*) est en TRU/(\mathcal{R}) : il est donc galiléen.

II.A.3) Dans (\mathcal{R}^*): $\vec{P}^* = m_a \vec{v}_a^* + m_b \vec{v}_b^* = (m_a + m_b) \vec{v}_c^* = \vec{0}$

D'où :

$$m_a \vec{v}_a^* + m_b \vec{v}_b^* = \vec{0}$$

II.A.4) On a :
$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{AB} = \vec{r}_b - \vec{r}_a \\ m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b = \vec{O} \quad (\text{définition du barycentre}) \end{cases}$$



Ainsi :

$$\begin{cases} \vec{r}_a = -\frac{m_b}{m_a + m_b} \vec{r} \\ \vec{r}_b = \frac{m_a}{m_a + m_b} \vec{r} \end{cases}$$

II.A.5) * Dans le référentiel (\mathcal{R}), le problème possède 6 variables d'espace (\vec{OA} et \vec{OB}).

* Dans le référentiel (\mathcal{R}^*), il s'agit de déterminer \vec{r}_a et \vec{r}_b (6 variables d'espace), qui sont liés par les 3 relations :

$$\begin{cases} \vec{r}_b - \vec{r}_a = \vec{r} \\ m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b = \vec{O} \\ m_a \vec{v}_a^* + m_b \vec{v}_b^* = \vec{O} \end{cases}$$

Il reste donc 3 variables indépendantes, ce qui revient à déterminer le mouvement du mobile fictif (cf question suivante).

II.A.6) Dans (\mathcal{R}):

$$\begin{cases} m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a & (1) \\ m_b \ddot{\vec{r}}_b = \vec{F}_b = -\vec{F}_a & (2) \end{cases}$$

Alors :

$$(1) \times m_b - (2) \times m_a \Rightarrow m_a m_b (\ddot{\vec{r}}_a - \ddot{\vec{r}}_b) = (m_a + m_b) \vec{F}_a$$

Ou encore :

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_b \quad \text{si} \quad \mu = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$$

Il s'agit bien de la RFD appliquée au mobile fictif M, de masse μ , tel que $\vec{CM} = \vec{r}$. La connaissance de \vec{r} permet alors de déterminer parfaitement :

$$\begin{cases} \vec{r}_a = -\frac{m_b}{m_a + m_b} \vec{r} \\ \vec{r}_b = \frac{m_a}{m_a + m_b} \vec{r} \end{cases}$$

II.A.7) Pour $m_b \gg m_a$:

$$\begin{cases} \mu \approx m_a \\ C \approx B \\ M \approx A \end{cases}$$

II.B) Invalidation du modèle de Thomson par l'expérience de Rutherford

II.B.1) La masse de la particule α est très supérieure à celle de l'électron ; si on suppose une interaction entre un électron et la particule α , l'ensemble étant isolé, son barycentre (i.e la particule α) est en mouvement de TRU, donc insensible à l'interaction avec les électrons.

II.B.2) Au contraire, la masse du noyau d'or est très grande devant celle de la particule α : pour l'interaction avec le noyau d'or, on considère ce dernier comme fixe dans le référentiel galiléen du laboratoire. La déviation de la particule α n'est due qu'à l'interaction répulsive avec le noyau d'or.

II.B.3) a) La particule α perçoit la force :

$$\vec{F} = + 2 e \vec{E} = \frac{2 e^2 r}{4 \Pi \epsilon_0 a^3} \quad \text{dans le modèle de Thomson.}$$

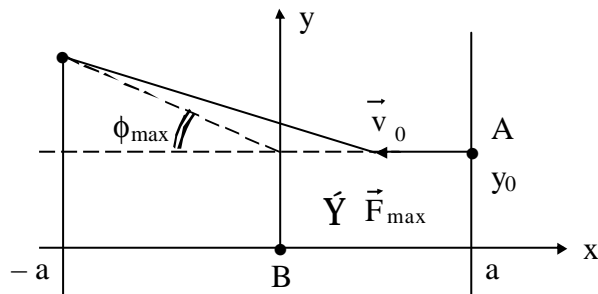
Ainsi :

$$F_{\max} = \frac{2 e^2}{4 \Pi \epsilon_0 a^3}$$

A.N. :

$$F_{\max} \approx 3,6 \times 10^{-6} \text{ N}$$

b) La particule α , soumise à une force constante, décrit dans l'atome B une trajectoire parabolique. La déviation sera maximale si elle traverse l'atome sur la longueur $2a$:



(Modèle simplifié)

Ainsi :

$$\begin{cases} \overset{oo}{x} = O \\ \overset{oo}{y} = \frac{F_{\max}}{m_a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{o}{x} = -v_0 t \\ \overset{o}{y} = \frac{F_{\max}}{m_a} t + O \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t + a \\ y(t) = \frac{1}{2} \frac{F_{\max}}{m_a} t^2 + y_0 \end{cases}$$

L'équation de la parabole est donc :

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{F_{\max}}{m_a} \left(\frac{x-a}{v_0} \right)^2 + y_0$$

Donc :

$$\Delta y = y(x = -a) - y_0 = \frac{1}{2} \frac{F_{\max}}{m_a} \left(\frac{2a}{v_0} \right)^2$$

Et :

$$\tan \phi_{\max} = \frac{\Delta y}{a} = 2 \frac{F_{\max}}{m_a} \frac{a}{v_0^2}$$

A.N. : $\phi_{\max} \approx 4,2 \times 10^{-4} \text{ rad}$

c) Pour 400 plans atomiques, la déviation maximale totale serait :

$$400 \phi_{\max} \approx 1,7 \times 10^{-1} \text{ rad} \ll 1$$

ce qui invalide le modèle de Thomson (pas de rétrodiffusion possible !).

II.C) Confrontation du modèle de Rutherford à l'expérience

II.C.1) Dans un modèle Planétaire, les Planètes gravitent autour du Soleil ; d'après le théorème de Gauss, le champ gravitationnel du Soleil est celui d'une masse ponctuelle placée au centre.

Par analogie :

$$\begin{cases} \epsilon_0 \leftrightarrow -\frac{1}{4\pi G} \\ -e \leftrightarrow M_p \text{ (masse de la Planète)} \\ Ze \leftrightarrow M_s \text{ (masse du Soleil)} \end{cases}$$

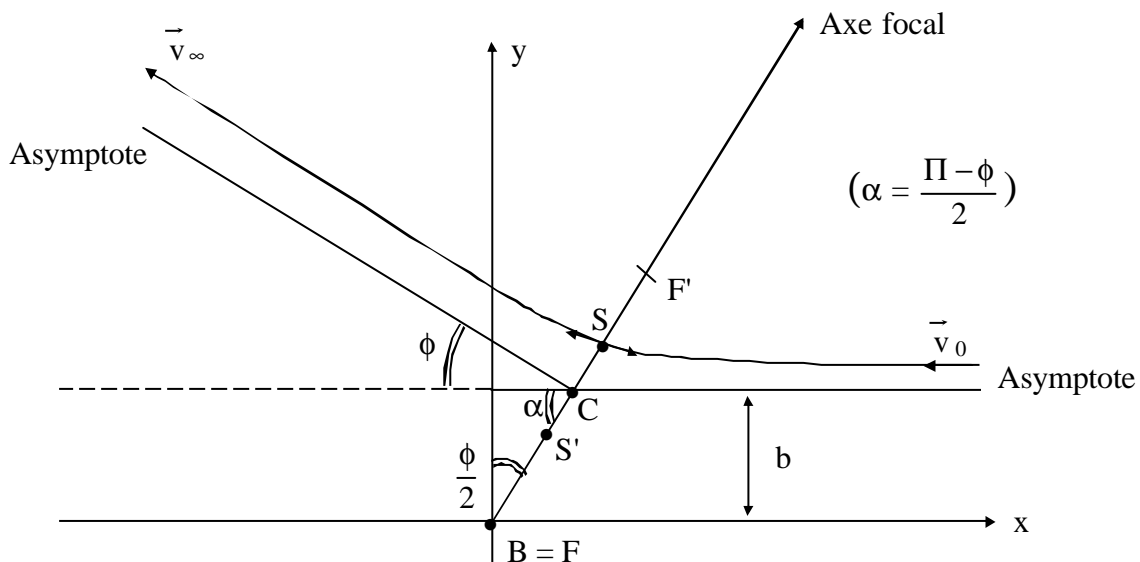
II.C.2) $\vec{F} = \frac{(Ze)(2e)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = -\text{grad } W(r) \Rightarrow \boxed{W(r) = \frac{(Ze)(2e)}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (K = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0})$

II.C.3) L'application du théorème du moment cinétique à la particule α , dans le référentiel galiléen du laboratoire, donne :

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} : \vec{\ell} = \vec{\text{cste}}$$

donc le mouvement est plan et obéit à la loi des aires ($r^2 \dot{\theta} = C = \frac{\ell}{m_a}$).

II.C.4) L'énergie totale du système est positive : il s'agit d'un état de diffusion, la trajectoire est une branche d'hyperbole donc B est un foyer.



Rem. : pour une force répulsive, la branche d'hyperbole décrite est la plus éloignée du centre des forces $B = F$ (autre foyer F' , autre branche de somme S' non représentée).

II.C.5) Posons :
$$\vec{L} = \vec{p} \wedge \vec{\ell} + m_a K \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{vecteur de Lenz})$$

On a :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}} \wedge \vec{\ell} + \vec{p} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{\ell}}{dt}}_{\vec{O}} + m_a K \underbrace{\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)}_{\overset{\circ}{\theta} \vec{u}_\theta}$$

Soit :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{K}{r^2} \vec{u}_r \wedge m_a r^2 \overset{\circ}{\theta} \vec{z} + m_a K \overset{\circ}{\theta} \vec{u}_\theta = m_a K \overset{\circ}{\theta} (\vec{u}_r \wedge \vec{z} + \vec{u}_\theta) = \vec{O}$$

Ainsi, $\vec{L} = \overline{\text{cste}}$, \in plan (\vec{x}, \vec{y}) de la trajectoire.

II.C.6) * EI :

$$\begin{cases} \vec{v} = -v_0 \vec{x} \\ \vec{\ell}_0 = (\vec{r} \wedge m_a \vec{v})_0 = m_a b v_0 \vec{z} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\vec{L}_0 = m_a v_0 \vec{x} \wedge m_a b v_0 \vec{z} + m_a K \vec{x}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{L}_0 = m_a K \vec{x} + m_a^2 b v_0^2 \vec{y}}$$

* EF :

$$\begin{cases} \vec{v}_\infty = v_0 (-\cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{y}) \\ \vec{\ell}_\infty = \overline{BC} \wedge m_a \vec{v}_\infty = b (\tan \phi/2 \vec{x} + \vec{y}) \wedge m_a v_0 (-\cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{y}) \end{cases}$$

Soit :

$$\vec{\ell}_\infty = m_a b v_0 \underbrace{[\tan \phi/2 \sin \phi + \cos \phi]}_{2 \sin^2 \frac{\phi}{2} + \cos \phi = 1} \vec{z} \Rightarrow \vec{\ell}_\infty = m_a b v_0 \vec{z} = \vec{\ell}_0 !$$

(résultat évident a priori, cf II.C.3)

Alors :

$$\vec{L}_\infty = m_a \vec{v}_\infty \wedge \vec{\ell}_\infty + m_a K \vec{u}_{r_\infty}$$

Soit :

$$\vec{L}_\infty = m_a^2 b v_0^2 (\cos \phi \vec{y} + \sin \phi \vec{x}) + m_a K (-\cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{y})$$

Et finalement :

$$\boxed{\vec{L}_\infty = (m_a^2 b v_0^2 \sin \phi - m_a K \cos \phi) \vec{x} + (m_a^2 b v_0^2 \cos \phi + m_a K \sin \phi) \vec{y}}$$

Comme $\vec{L}_0 = \vec{L}_\infty$, on tire :

$$\begin{cases} m_a^2 b v_0^2 \sin \phi - m_a K \cos \phi = m_a K \\ m_a^2 b v_0^2 \cos \phi + m_a K \sin \phi = m_a^2 b v_0^2 \end{cases}$$

L'une ou l'autre de ces 2 équations donne alors bien :



$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{K}{m_a b v_0^2} = \frac{\beta}{b}$$

Rem. : on retrouve plus rapidement le résultat en invoquant le fait que \vec{L} est nécessairement porté par l'axe focal.

Alors :

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{\|\vec{p} \wedge \vec{\ell}\|_0}{\|m_a K \vec{u}_r\|_0} = \frac{m_a K}{m_a^2 \ell v_0^2}$$

II.C.7) a) Le nombre de particules de paramètre d'impact compris entre b et $b + db$ est :

$$dn = J \times 2 \Pi b db$$

b) Ainsi :

$$\sigma = \frac{dn}{J d\Omega} = \left| \frac{bdb}{\sin \phi d\phi} \right| \quad (\sigma \text{ en m}^2)$$

Comme $b = \frac{\beta}{\tan \frac{\phi}{2}}$:

$$db = - \frac{\beta d\phi}{2 \tan^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{\beta d\phi}{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

D'où :

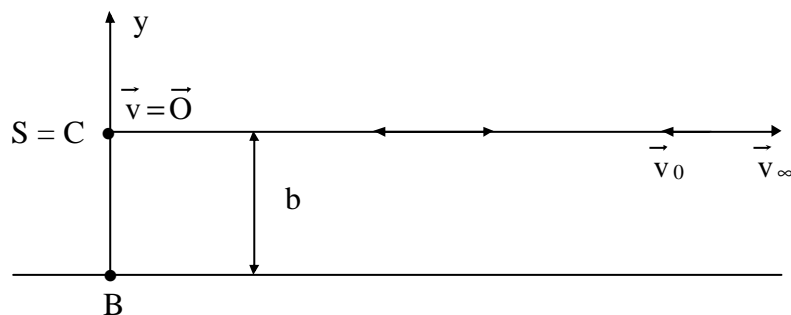
$$\sigma = \frac{\beta^2}{2 \tan^2 \frac{\phi}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2} \underbrace{\sin \phi}_{2 \sin \phi/2 \cos \phi/2}}$$

Et finalement :

$$\sigma = \frac{\beta^2}{4 \sin^4 \frac{\phi}{2}}$$

c) La valeur expérimentale de σ obtenue par Geiger et Marsden est donc bien conforme au modèle de Rutherford.

d) Intuitivement, la plus petite distance d'approche est $r_m = b$, pour $\phi = \Pi$:



A.N. : pour $\phi = \Pi$: $b = \beta = \frac{K}{m_a v_0^2}$, $K = \frac{2Ze^2}{4\Pi\epsilon_0}$

$$\beta \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

$$\left(\frac{1}{2} m_a v_0^2 = 5,3 \text{ MeV} = 5,3 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}\right)$$

e) * Pour $\phi < \phi_0 \Leftrightarrow b > b_0$, on peut ($b(\phi)$ fonction décroissante de ϕ) donc considérer le modèle classique (avec interaction électrostatique) comme valide.

* Pour $\phi > \phi_0 \Leftrightarrow b < b_0$, ce modèle cesse d'être valable, et il faut adopter un modèle quantique.

$$\underline{A.N.} : * b_0 = \frac{\beta}{\tan(\phi_0/2)} = 0,27 \beta \approx 5,4 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\text{Puis : } * r_m = BS = c + a = c + \sqrt{c^2 - b^2}, \text{ avec } c = BC = \frac{b}{\cos \phi/2}$$

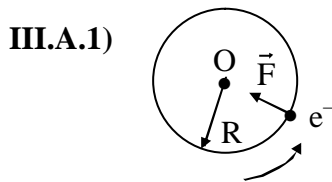
$$\text{D'où : } r_{m_0} = c_0 + \sqrt{c_0^2 - b_0^2}, c_0 = \frac{b_0}{\cos(\phi_0/2)}$$

$$\underline{A.N.} : r_{m_0} \approx 7,6 b_0 \approx 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

f) L'ordre de grandeur actuellement estimé de la taille du noyau atomique est 10^{-15} m , ce qui est cohérent avec les applications numériques des questions d) et e).

Partie III –Modèle semi-quantique de Bohr

III.A) Quantification et condition de Bohr



$$\vec{F} = - \frac{e^2}{4 \Pi \epsilon_0 R^2} \vec{u}_r = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \text{ (projection sur } \vec{u}_\theta) \\ m \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4 \Pi \epsilon_0 R^2} \text{ (projection sur } \vec{u}_r) \end{cases}$$

Le mouvement est donc circulaire uniforme, de vitesse :

$$v = \left(\frac{e^2}{4 \Pi \epsilon_0 m R^2} \right)^{1/2}$$

La période de rotation de l'électron est alors :

$$T = \frac{2 \Pi R}{v} = 2 \Pi \sqrt{\frac{m R^3}{K_0}}$$



avec :

$$K_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

On retrouve bien sûr la 3^e loi de Képler (T^2 proportionnelle à R^3).

$$\text{III.A.2)} * \vec{F} = -\frac{K_0}{R^2} \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(-\frac{K_0}{R} \right) \Rightarrow E_p = -\frac{K_0}{R} \quad (+ \text{cste})$$

$$* \text{ On en déduit : } E = E_C + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{K_0}{R}$$

Soit, compte-tenu de l'expression précédente de v :

$$E = -\frac{K_0}{2R} \quad (= -E_C)$$

On retrouve bien sûr une énergie négative (état « lié »).

$$\text{III.A.3)} * \text{ Pour l'orbite de rayon } R_n : \begin{cases} E_n = -\frac{K_0}{2R_n} \\ L_n = m v_n R_n = \sqrt{m R_n K_0} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } E_n = -\frac{1}{2} \frac{m K_0^2}{L_n^2} = -\frac{Y}{L_n^2}$$

avec :

$$Y = \frac{1}{2} m K_0^2 = \frac{m e^2}{32\pi^2 \epsilon_0}$$

$$* \text{ Pour l'orbite de rayon } R_p, \text{ on a de même : } E_p = -\frac{Y}{L_p^2}$$

$$\text{Ainsi : } E_p - E_n = Y \left(\frac{1}{L_n^2} - \frac{1}{L_p^2} \right) \quad (2)$$

III.A.4) * La quantification du moment cinétique impose :

$$\frac{1}{L_n^2} - \frac{1}{L_p^2} = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

* La relation $E_p - E_n = h v_{np}$ donne alors, compte-tenu de la relation (2) :

$$h v_{np} = Y \left(\frac{1}{L_n^2} - \frac{1}{L_p^2} \right) = \frac{Y}{\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

* Enfin, comme $v = \frac{C}{\lambda}$, on retrouve bien l'égalité (1) :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = \frac{Y}{hC\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

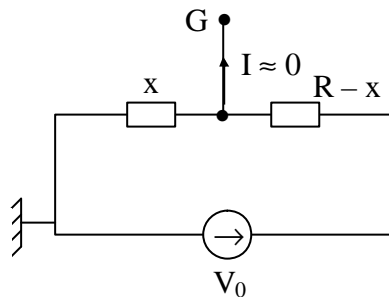
avec $R_H = \frac{Y}{hC\hbar^2}$, soit : $R_H = \frac{Y}{2\Pi C\hbar^3}$, et donc finalement :

$$R_H = \frac{m e^4}{64\Pi^3 \epsilon_0^3 C \hbar^3} \quad (\text{constante de Rydberg})$$

A.N. : $R_H = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

III.B) Confirmation du modèle de Bohr : expérience de Franck et Hertz (1913)

III.B.1)



Par diviseur de tension ($I \ll \frac{V_0}{R}$)

$$V_G \approx \frac{x}{R} V_0$$

Les résistances réglables permettent donc de faire varier la tension de grille V_G (on utilise bien sûr un montage potentiométrique).

III.B.2) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à un électron, on obtient :

$$\frac{1}{2} m v_G^2 - 0 = -e(0 - V_G) \Rightarrow v_G = \sqrt{\frac{2e V_G}{m}}$$

(On suppose bien sûr l'électron non relativiste).

III.B.3) De même entre la grille G et l'électrode E :

$$\frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{1}{2} m v_G^2 = -e(V_G - V_E) = -e\varepsilon \Rightarrow v_E^2 = v_G^2 - \frac{2e\varepsilon}{m} = \frac{2e}{m} (V_G - \varepsilon)$$

Finalement :

$$v_E = \sqrt{\frac{2e V_P}{m}}$$

(On obtient bien sûr directement ce résultat en appliquant le TEC entre le filament et l'électrode).

III.B.4) L'électrode collecte les électrons ; le nombre d'électrons collectés par seconde correspond à l'intensité I mesurée par l'ampèremètre.



III.B.5) a) Pour $V_G \in [0, V_r]$, I croît avec V_G , puisque la vitesse des électrons émis augmente avec V_G , donc le flux d'électrons atteignant la cathode augmente.

b) Pour $V_G = V_r$, cette croissance de I s'arrête : une collision inélastique d'un électron avec un atome de vapeur prélève à l'électron une énergie eV_r .

c) Dès que $V_G > V_r - \varepsilon$, les électrons ont de nouveau une énergie suffisante pour atteindre l'électrode collectrice.

Le phénomène se reproduit pour tous les multiples de V_r , puisque les électrons peuvent subir plusieurs chocs inélastiques.

III.B.6) L'atome prélève à l'électron l'énergie $W_r = e V_r$

III.B.7) a) Pour $V_G > V_r$, les atomes de mercure sont « excités » et ne se trouvent plus dans leur état fondamental.

b) L'expérience de Franck et Hertz confirme l'existence de niveaux d'énergie (au moins un...) quantifié pour le nuage électronique.

Partie IV – Chute du modèle de Bohr et théorie quantique

IV.A) Dans le modèle de Bohr, l'électron est en mouvement circulaire uniforme autour du noyau : il est donc accélééré (accélération centripète).

Or, toute chargée accélérée rayonne de l'énergie électromagnétique (rayonnement d'accélération) : l'énergie du système noyau électron ne peut donc être conservée, contrairement à ce que postule le modèle de Bohr. Il faut donc utiliser un modèle quantique.

IV.B) Critère quantique

IV.B.1) \hbar quantifie le moment cinétique. Cette constante s'exprime donc en :

$$\underline{\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}} \quad (\text{ou } \underline{\text{J s}})$$

IV.B.2) Le moment cinétique de l'extrémité de l'aiguille est :

$$L = m v r = m \omega r^2$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \approx 1 \text{ g} \\ \omega = \frac{2 \Pi}{60} \text{ s}^{-1} \\ r \approx 3 \text{ cm} \end{array} \right. \Rightarrow \underline{L \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ Js} \gg \hbar}$$

La théorie quantique n'est donc pas nécessaire à la compréhension du fonctionnement d'une montre mécanique à aiguilles.



IV.B.3) Pour l'antenne, il s'agit de comparer le rapport $\frac{\text{énergie}}{\text{fréquence}}$ à h (ou à \hbar).

$$\text{Or : } \frac{\text{énergie}}{\text{fréquence}} \equiv \frac{\text{puissance}}{(\text{fréquence})^2} \sim \frac{10^3}{(10^6)^2} = 10^{-9} \text{ Js} \gg \hbar$$

L'antenne radio ne relève pas non plus de la physique quantique.

IV.B.4) Pour le circuit oscillant :

$$\begin{aligned} \frac{\text{énergie}}{\text{fréquence}} &\sim \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2}{2\pi/\sqrt{LC}} + \frac{1}{2} Li^2 \sim \frac{Li^2}{2\pi/\sqrt{LC}} \\ &\approx \frac{(10^{-4})(10^{-3})^2}{2\pi} \times 10^{-7} \approx 10^{-18} \text{ Js} \gg \hbar \end{aligned}$$

Le circuit oscillant ne relève pas plus de la physique quantique.

IV.B.5) Pour l'atome d'hydrogène :

$$\frac{\text{énergie}}{\text{fréquence}} \approx \frac{210^{-18}}{C/\lambda} = \frac{210^{-18}}{310^8} \times 10^{-7} \approx 10^{-33} \text{ Js, du même ordre de grandeur que } \hbar.$$

On en déduit que la théorie quantique est nécessaire pour la description de l'atome d'hydrogène.

IV.B.6) Dans le modèle quantique, on décrit le comportement de l'électron en terme de probabilité de présence. On associe à cet électron une fonction d'onde ψ , telle que :

$$dP = |\psi|^2 d\tau$$

(dP : probabilité de présence de l'électron dans le volume $d\tau$).

Cette fonction d'onde est régie par l'équation de Schrödinger.

IV.B.7) Un « modèle » ne peut être strictement considéré comme « vrai » ou « faux ».

Il permet de décrire certains phénomènes physiques observés expérimentalement.

Au fur et à mesure de l'évolution de la pensée scientifique, étayée par l'expérience et l'observation, certains modèles sont conduits à être modifiés ou « raffinés », rarement complètement abandonnés.